UNIVERSITE MOHAMED I

Faculté Des Sciences
Département De Mathématiques
Et Informatique, OUJDA

Année Universitaire 2008/09
Filière SMP-SMC, S_1

Feuille 1 d'exercices d'algèbre.
Nombres complexes et structures algèbriques.

EXERCICE I.

1. Calculer **(a):** $\left| \frac{(3+3i)(3+2i)}{(6-4i)(1-i)} \right|$ et **(b):** $\left| \frac{(1+i)^{13}}{(\sqrt{3}+i)^7} \right|$.
2. Mettre sous la formes polaire et cartésienne les nombres complexes suivants:
   (a): $\left(\frac{2+2i}{i-1}\right)^5$ et **(b):** $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{10}$.
3. Le cercle unité et les axes divisant le plan en huit régions étiquetées A à H dans la figure (voir vérso). Pour le point z indiqué sur la figure, indiquer dans quelle région se trouvent les points suivants: e^{iz}, $\frac{-1}{\overline{z}}$, z^2, $\frac{\overline{z}}{z^2}$, $e^{i\pi}\overline{z}$, $e^{\frac{i\pi}{3}}(z+\overline{z})$

EXERCICE II.

1. Identifier le lieu des points du plan de Gauss satisfaisant $1 \leq \left| \frac{(iz+2)}{(i-2z)} \right|$.
2. Trouver les 4 racines de l'équation $z^4 - 3(1+2i)z^2 - 8 + 6i = 0$.
3. Calculer les racines quatrième de -1, avec représentation dans le plan de Gauss.
4. Résoudre l'équation $z^n = a$, $(a \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N})$.
5. Pour $\omega \in \mathbb{C}$, trouver $\sqrt{\omega}$. Donner $\sqrt{3-4i}$.
6. Résoudre l'équation $X^2 - X + i - 1/2$.

EXERCICE III.

1. De quel angle faut-il tourner le vecteur associé au nombre complexe $z_1 = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ pour obtenir le vecteur associé au nombre complexe $z_2 = \sqrt{3} + i$.
2. Produire une représentation géométrique des nombres complexes z et $(cos\alpha + isin\alpha)z$, $(z \in \mathbb{C})$ et $(\alpha \in \mathbb{R})$.
3. En utilisant les formules d'Euler, écrire $cos2xcos^2x$ sous la formes $\sum(A_k coskx + B_k sinkx)$.
4. Calculer $1 + tan^2\theta$ en utilisant les formules d'Euler.

EXERCICE IV. L'algèbre des nombre complexes et des fonctions exponentielles complexes permet des calculs expéditifs, de façons très efficace, dans divers domaines, par exemple dans l'étude des circuits à courants altérnatif:

1. Montrer que la somme des oscillations harmoniques $cos\omega t$ et $cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$ est elle-même une oscillation harmonique.
2. Donner la phase et l'amplitude.

EXERCICE V. Sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ on définie les deux lois suivantes. $(a, b) + (a' + b') = (a + a', b + b')$ et $(a, b).(a' + b') = (aa' - bb', ab' + ba')$.

1. Montrer que $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, .)$ sont deux groupes abéliens.
2. Montrer que $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, .)$ est un corps commutatif.
3. Montrer que l'équation $X^2 + 1$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ mais admet $(0, 1)$ comme solution dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. On confend alors $(1, 0)$ avec 1 et on pose $(0, 1) = i$ et $(a, b) = a + ib$ alors on note $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$ et on l'appel corps des nombres complexes

EXERCICE VI.

1. On muni l'ensemble $\mathbb{N}$ de la loi de composition interne $*$ définie par: $a * b = a^2 + b^2$. Cette loi est elle commutative? Associative? munie d'un élément neutre?
2. Montrer que l'ensemble $(\{1, -1, i, -i\}, .)$ est un groupe, préciser son élément neutre et donner sa table d'opération.
3. Soit $G = \{-1, 1\} \times \{-1, 1\}, .$ muni de la loi de composition $(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2)$. Montrer que G est un groupe abélien et donner sa table d'opération.
4. Soit S_3 le groupe de permutations de $\{1, 2, 3\}$. Donner sa table d'opération, et donner ses sous-groupes d'ordre $1, 2, 3$ et 6.
5. Donner le groupe de la molécule d'amoniac NH_3 montrer qu'il est isomorphe à S_3.

EXERCICE VII.

1. Montrer que dans un groupe $(G, *)$:
   (a) chacune des relations $a * b = a * c$ ou bien $b * a = c * a$ implique $b = c$.
   (b) chacune des équations $a * x = b$ et $y * a = b$ admet une solution unique $x = a^{-1} * b$, $y = b * a^{-1}$.
2. Montrer qu'un sous-groupe H d'un groupe G est lui-même un groupe.

EXERCICE VIII. Donner les structures possibles sur les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ pour les lois " + " et ".".